数理解析研究所講究録
第 1668 巻 2009 年 25-42

複素2次超曲面の実形の大域的タイト性と特殊関数

東京電機大学・未来科学部　入江　博 (Hiroshi Iriyeh)
School of Science and Technology for Future Life,
Tokyo Denki University
首都大学東京・理工学研究科　酒井高司 (Takashi Sakai)
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University

論文 [5] において Y.-G. Oh は Hermite 対称空間内の Lagrange 部分多様体についてタイト性の概念を定義し, 複素射影空間 $P_n(\mathbb{C})$ 内の大域的にタイトな Lagrange 部分多様体は全測地的な $P_n(\mathbb{R})$ に限ることを示した. 本稿では, タイト性の定義とこれまでに知られている結果を概観するとともに, 複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $Q_{1,n+1}(\mathbb{R})$ および $Q_{2,n}(\mathbb{R})$ が大域的にタイトな Lagrange 部分多様体であることの証明を詳述する. 特に, タイト性が Arnold 予想と積分幾何の議論を経由することにより, あるクラスの特殊関数の計算に帰着することを明らかにしたい. さらに, 最近得られた旗多様体 $F_n(\mathbb{C})$ の実形 $F_n(\mathbb{R})$ が大域的にタイトな Lagrange 部分多様体であることも報告する.

1　定義と既知の結果

以下, Lagrange 部分多様体 L は連結, コンパクト, 境界なしで埋め込まれたものとする. Oh のタイト性の定義は変更なく等質 Kähler 多様体の場合まで拡張される.

定義 1.1 (Oh [5]). $(M = G/K, \omega, J)$ を等質 Kähler 多様体, L を M の Lagrange 部分多様体とする. L と gL が横断的に交わるような M の任意の正則等長変換 $g \in G$ について

$$\#(L \cap gL) = SB(L, \mathbb{Z}_2) \tag{1.1}$$

が成り立つとき, L は**大域的にタイト** (globally tight) であるという. ここで, $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の和を表す.

また, 恒等変換に近い $g \in G$ で L と gL が横断的に交わるものについて常に (1.1) が成り立つとき, L は**局所的にタイト** (locally tight) であるという.

例えば, Hermite 対称空間 G/K の実形

$$\mathrm{Fix}\,\tau := \{x \in G/K \mid \tau(x) = x\}$$

は全測地的 Lagrange 部分多様体であるが, 局所的にタイトであることが知られている (竹内-小林 [9]). ここで, τ は G/K の反正則自己対合 $(\tau^* J = -J)$ を表す. Oh は, $M = P_n(\mathbb{C})$ の場合に局所的にタイトな Lagrange 部分多様体を決定した.

定理 1.2 (Oh [5]). L を $P_n(\mathbb{C})$ の局所的にタイトな Lagrange 部分多様体とする. このとき, $n \geqq 2$ ならば L は全測地的な実射影空間 $P_n(\mathbb{R})$ と合同であり, $n = 1$ のときは $P_1(\mathbb{C}) \cong S^2(1)$ の大円 ($\cong P_1(\mathbb{R})$) または小円のいずれかである.

ここで, 小円は, それと平行な軸のまわりに S^2 を半回転させると交わりがなくなるので大域的にタイトではない. 一方, $P_n(\mathbb{R}) \subset P_n(\mathbb{C})$ については次の結果が知られている.

定理 1.3 (Howard [3], p.26-27). $P_n(\mathbb{C})$ の実形 $P_n(\mathbb{R})$ は大域的にタイトである.

これらの結果により, $P_n(\mathbb{C})$ の大域的にタイトな Lagrange 部分多様体は実形に限ることがわかった. そこで, 次の問題を考えるのは自然であろう.

問題 1.4 (Oh [5]). $P_n(\mathbb{C})$ 以外の Hermite 対称空間内の局所的にタイトな Lagrange 部分多様体を分類せよ. とくに, 大域的にタイトなものは実形に限るか?

この問題について, 次の結果を得ている. これは定理 1.2 以外で現在知られている唯一の分類結果である.

定理 1.5 (入江-酒井 [4]). L を $(S^2 \times S^2, \omega_0 \oplus \omega_0)$ の局所的にタイトな Lagrange 曲面とする. ここで, ω_0 は $P_1(\mathbb{C}) \cong S^2(1)$ となるような標準的な Kähler 形式とする. このとき, L は次のいずれかと合同になる:

(i) 全測地的な Lagrange 球面 $\{(x, -x) \in S^2(1) \times S^2(1) \mid x \in S^2\}$.

(ii) $S^2(1)$ 内の大円または小円の直積 $S^1(a) \times S^1(b) \subset S^2(1) \times S^2(1)$.

ここで, $0 < a, b \leqq 1$ である.

大域的なタイト性については, (ii) の場合は, $a = b = 1$ のときに限り大域的にタイトであることは自明である. ところが, (i) については少々議論が必要になる.

定理 1.6 (入江-酒井 [4]). $S^2(1) \times S^2(1) \cong Q_2(\mathbb{C})$ の全測地的 Lagrange 球面

$$\{(x, -x) \in S^2(1) \times S^2(1) \mid x \in S^2\}$$

は大域的にタイトである.

以上より, $S^2 \times S^2$ の大域的にタイトな Lagrange 曲面は実形に限ることがわかった. 定理 1.5 の証明を一般次元の複素 2 次超曲面の場合, さらに一般の Hermite 対称空間の場合に拡張することは困難が多く, 現在全く手がついていない. このように分類問題は難しいが, 定理 1.6 および竹内-小林の結果から次の問題を考えるのは自然である.

問題 1.7. Hermite 対称空間 (より一般に等質 Kähler 多様体) の実形は, (局所的にタイトだが) 大域的にもタイトか?

まず, 定理 1.6 の高次元化を考えてみる. 複素 2 次超曲面

$$Q_n(\mathbb{C}) = \{[z] \in P_{n+1}(\mathbb{C}) \mid z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0\}$$

の実形は,

$$Q_{k,n-k+2}(\mathbb{R}) = \{[x] \in P_{n+1}(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2 - x_k^2 - \cdots - x_{n+1}^2 = 0\}$$

と表されるが, 位相的には $Q_{k,n-k+2}(\mathbb{R}) \cong (S^{k-1} \times S^{n-k+1})/\mathbb{Z}_2$ である. ここでは, $k = 1, 2$ の場合を取り扱う.

定理 1.8 (入江-酒井). 複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $Q_{1,n+1}(\mathbb{R})$ および $Q_{2,n}(\mathbb{R})$ は大域的にタイトな Lagrange 部分多様体である.

本稿の主目的は, 定理 1.8 を証明することである. また, 最後の節で最近得られた旗多様体 $F_n(\mathbb{C})$ の実形の大域的タイト性について結果のみを紹介する.

2 準備

この節では定理 1.8 を証明するための準備を行う.

2.1 Riemann 等質空間の Poincaré の公式

U を有限次元計量ベクトル空間, V と W を U の部分ベクトル空間とする. V の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_m$, W の正規直交基底 $w_1, \ldots, w_{m'}$ をとる. このとき, V と W の**角度** (angle) を次で定義する.

$$\sigma(V, W) = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{m'}\|.$$

G を左不変 Riemann 計量をもつ Lie 群, K を G の閉部分群とする. G の計量は K 上両側不変であることを仮定する. $T_p(G/K)$ の部分空間 V と $T_q(G/K)$ の部分空間 W に対して, $g_p, g_q \in G$ を $g_p o = p$ および $g_q o = q$ をみたすようにとる. このとき, V と W の**角度** (angle) が

$$\sigma_K(V, W) = \int_K \sigma((dg_p)_o^{-1} V, (dk)_o^{-1} (dg_q)_o^{-1} W) d\mu(k) \tag{2.1}$$

により定義される. 関数 $\sigma_K(V, W)$ は, g_p と g_q の取り方によらない. 次の定理は, Howard [3, Theorem 3.8] によって証明された Riemann 等質空間に対する Poincaré の公式である.

定理 2.1 (Poincaré の公式). G/K を Riemann 等質空間で, G は unimodular であると仮定する. このとき, G/K の部分多様体 M と N が $\dim(G/K) \leqq \dim M + \dim N$ をみたすならば,

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu(g) = \int_{M \times N} \sigma_K(T_p^{\perp} M, T_q^{\perp} N) d\mu(p, q),$$

が成り立つ. ここで, $T_p^{\perp} M$ は点 $p \in M$ における M の法空間を表す.

M, N がともに Lagrange 部分多様体 L の場合, $\mathrm{vol}(L \cap gL)$ は L と gL が横断的に交わる限り交点数 $\#(L \cap gL)$ と解釈できる. ほとんどすべての $g \in G$ について, L と gL は横断的に交わる.

2.2 一般化超幾何関数

一般化超幾何関数 (generalized hypergeometric function) ${}_3F_2$ は, $d, e \notin -\mathbb{N}$ に対して, べき級数

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} ; z \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a, l)(b, l)(c, l)}{(d, l)(e, l)\, l!} z^l \tag{2.2}$$

の解析接続によって得られる関数である．ここで,

$$(a,l) := \begin{cases} 1 & (l=0) \\ a(a+1)\cdots(a+l-1) & (l=1,2,\ldots) \end{cases}$$

である．(2.2) の右辺は, $|z|<1$ または $z=1, \mathrm{Re}(d+e-a-b-c)>0$ または $z=-1, \mathrm{Re}(d+e-a-b-c)>-1$ のとき収束する．この関数の点 $z=1$ での値は, 次の公式によって計算できる (see [10, p.51-52])．

命題 2.2 (Dixon, 1903). $\mathrm{Re}(a-2b-2c)>-3$ のとき,

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix};1\right) = \frac{\Gamma(1+\frac{a}{2})\Gamma(1+\frac{a}{2}-b-c)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)\Gamma(1+\frac{a}{2}-c)}$$

が成り立つ．ここで, Γ はガンマ関数 $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ を表す．

2.3 Hermite 対称空間の場合の Arnold-Givental の不等式

次の公式は Arnold 予想の一つの形で, Arnold-Givental の不等式という．Hermite 対称空間の場合を紹介する．

定理 2.3 (Oh [6], [7], [8]). $(G/K,\omega,J)$ をコンパクト Hermite 対称空間, L を G/K の実形とする．L の最小 Maslov 数は 2 以上と仮定する．このとき, L と $\phi(L)$ が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相写像 $\phi\in\mathrm{Ham}(G/K,\omega)$ に対して, 不等式

$$\#(L\cap\phi(L))\geq SB(L,\mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ．

実形の大域的タイト性の研究は, Hamilton 微分同相群 $\mathrm{Ham}(G/K,\omega)$ の有限次元部分群である正則等長変換群 G での Arnold-Givental の不等式の等号成立条件の研究と見做せる．

注意 2.4. $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 L の場合は、いずれも最小 Maslov 数は 2 以上である．

2.4 平均交点数

ここでは, 平均交点数の概念を導入し, ある種の Lagrange 部分多様体が大域的にタイトであるための十分条件を与える．

定義 2.5. $(G/K,\omega,J)$ をコンパクト等質 Kähler 多様体, L を G/K の Lagrange 部分多様体とする．このとき, 実数値

$$\frac{\int_G \#(L\cap gL)d\mu(g)}{\mathrm{vol}(G)} \tag{2.3}$$

を L の正則等長変換群 G に関する**平均交点数** (average intersection number) という．

G/K の Lagrange 部分多様体 L が大域的にタイトならば, 定義により L の G に関する平均交点数は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の和に等しい. 逆に, Arnold-Givental の不等式が成立するような Lagrange 部分多様体 L については次が成り立つ.

命題 2.6. G/K をコンパクト Hermite 対称空間, L を Arnold-Givental の不等式 (定理 2.3) が成り立つような G/K の Lagrange 部分多様体とする. このとき, L の G に関する平均交点数が $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ と等しければ, L は大域的にタイトである.

証明. $L \subset G/K$ が大域的にタイトでないと仮定する. このとき, Arnold-Givental の不等式が成り立つことから, L と g_0L が横断的に交わりかつ不等式

$$\#(L \cap g_0L) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2) + 1$$

が成り立つような $g_0 \in G$ が存在する. したがって, g_0 の G における開近傍 U で, すべての $g \in U$ に対して

$$\#(L \cap gL) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2) + 1$$

が成り立つものが存在する. L の G に関する平均交点数が $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ に等しいことおよび Arnold-Givental の不等式により,

$$\begin{aligned}
SB(L, \mathbb{Z}_2)\mathrm{vol}(G) &= \int_G \#(L \cap gL)d\mu(g) \\
&= \int_{G \setminus U} \#(L \cap gL)d\mu(g) + \int_U \#(L \cap gL)d\mu(g) \\
&\geq \int_{G \setminus U} SB(L, \mathbb{Z}_2)d\mu(g) + \int_U (SB(L, \mathbb{Z}_2) + 1)d\mu(g) \\
&= \int_G SB(L, \mathbb{Z}_2)d\mu(g) + \int_U d\mu(g) \\
&= SB(L, \mathbb{Z}_2)\mathrm{vol}(G) + \mathrm{vol}(U)
\end{aligned}$$

が成り立つ. これは $\mathrm{vol}(U) > 0$ に矛盾する. □

3 複素 2 次超曲面の実形

$P_{n+1}(\mathbb{C})$ 内の複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ を

$$Q_n(\mathbb{C}) = \{[z] \in P_{n+1}(\mathbb{C}) \mid z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0\}$$

によって定義する. これは

$$\begin{array}{ccc}
Q_n(\mathbb{C}) & \cong & \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2}) \\
[x + \sqrt{-1}y] & \longleftrightarrow & \mathrm{span}\{x, y\}
\end{array}$$

によって $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の向き付けられた 2 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$ と同一視される. ただし, ここで $\{x, y\}$ は 2 次元部分空間 $\mathrm{span}\{x, y\}$ の正の向きの正規直

交基底を表す. $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$ には $G = SO(n+2)$ が推移的に作用し,

$$o = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\} \in \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$$

におけるイソトロピー部分群は

$$K = \left\{\begin{pmatrix}A & O\\O & B\end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(2),\ B \in SO(n)\right\} \cong SO(2)\times SO(n)$$

となる. したがって, $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$ は o を原点として

$$\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2}) \cong G/K = SO(n+2)/SO(2)\times SO(n)$$

と等質空間表示される. G と K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{k}$ と表し,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

と標準分解すると

$$\mathfrak{m} = \left\{\begin{pmatrix}O & X\\-X & O\end{pmatrix} \;\middle|\; X \in M_{2,n}(\mathbb{R})\right\}$$

は接空間 $T_o(G/K)$ と同一視される. さらに, $\mathfrak{m}$ は

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{m} & \cong & M_{2,n}(\mathbb{R})\\ \begin{pmatrix}O & X\\-X & O\end{pmatrix} & \longleftrightarrow & X\end{array}$$

によって $M_{2,n}(\mathbb{R})$ と同一視して表すことがあるので注意しておく. $\mathfrak{m}$ の正規直交系

$$e_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

をとる. $\mathfrak{m}$ の複素構造を J と表すと, 単位ベクトル

$$Je_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, Je_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \ldots, Je_n = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{m}$ に属し, $\{e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n\}$ は $\mathfrak{m}$ の正規直交基底をなす.

$P_{n+1}(\mathbb{R})$ 内の 2 次超曲面

$$L = Q_{k,n-k+2}(\mathbb{R}) = \{[x] \in P_{n+1}(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \cdots + x_{k-1}^2 - x_k^2 - \cdots - x_{n+1}^2 = 0\}$$

を考える. L は

$$\begin{aligned} Q_{k,n-k+2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow Q_n(\mathbb{C}) \\ [x_0,\dots,x_{n+1}] &\longmapsto [x_0,\dots,x_{k-1},\sqrt{-1}x_k,\dots,\sqrt{-1}x_{n+1}]. \end{aligned}$$

によって $Q_n(\mathbb{C})$ に埋め込まれる. このとき L は

$$\begin{array}{rcl} \tau : Q_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Q_n(\mathbb{C}) \\ [z_0,\dots,z_{n+1}] & \longmapsto & [\bar{z}_0,\dots,\bar{z}_{k-1},-\bar{z}_k,\dots,-\bar{z}_{n+1}] \end{array}$$

によって与えられる $Q_n(\mathbb{C})$ の反正則自己対合 τ の固定点集合である. つまり, $Q_{k,n-k+2}(\mathbb{R})$ は $Q_n(\mathbb{C})$ の実形である. 逆に, $Q_n(\mathbb{C})$ の任意の実形は $Q_{k,n-k+2}(\mathbb{R})$ のいずれかと合同になることが知られている.

4 実形 $Q_{1,n+1}(\mathbb{R})$ の大域的タイト性

実形 $L = Q_{1,n+1}(\mathbb{R})$ を考える.

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(n+1) \right\} \subset SO(n+2)$$

とおくと, L は $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$ の原点 o を通る H 軌道として

$$\begin{aligned} L &= Q_{1,n+1}(\mathbb{R}) = \left\{ \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \right\} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in S^n \right\} \\ &= H \cdot o \cong SO(n+1)/SO(n) = S^n \end{aligned}$$

のように表される. 任意の点 $p \in L$ に対して, $\{Je_1,\dots,Je_n\}$ が $(dg)_o^{-1}(T_pL)$ の正規直交基底であり, $\{e_1,\dots,e_n\}$ が $(dg)_o^{-1}(T_p^\perp L)$ の正規直交基底であるような $g \in G$ が存在する. (2.1) により,

$$\begin{aligned} \sigma_K(T_p^\perp L, T_q^\perp L) &= \int_K \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge k^{-1}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\| d\mu(k) \\ &= \int_K |\langle Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ k^{-1}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| d\mu(k) \\ &= \int_{SO(2)\times SO(n)} |\langle Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ B^{-1}A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| d\mu(A) d\mu(B) \\ &= \int_{SO(2)\times SO(n)} |\langle B(Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n),\ A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| d\mu(A) d\mu(B) \\ &= \mathrm{vol}(SO(n)) \int_{SO(2)} |\langle Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| d\mu(A) \end{aligned}$$

ここで，$k \in K$ を $k^{-1} = B^{-1}A$ $(A \in SO(2),\ B \in SO(n))$ と表した．最後の等式は Lagrange 部分空間 $Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n$ の $SO(n)$ の作用での不変性による．さらに，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，$Ae_i = \cos\theta e_i + \sin\theta Je_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ となり，上の式の被積分関数は

$$\begin{aligned} &|\langle Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ A(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| \\ &= |\langle Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ (\cos\theta e_1 + \sin\theta Je_1) \wedge \cdots \wedge (\cos\theta e_n + \sin\theta Je_n)\rangle| \\ &= |\langle Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ \sin^n\theta Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n\rangle| \\ &= |\sin^n\theta| \end{aligned}$$

のように計算できる．したがって，角度関数は

$$\sigma_K(T_p^{\perp}L, T_q^{\perp}L) = 4\mathrm{vol}(SO(n)) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = 2\mathrm{vol}(SO(n))B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{4.1}$$

となる．ここで，B はベータ関数 $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\, d\theta$ を表す．

定理 4.1. 複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $Q_{1,n+1}(\mathbb{R})$ は大域的にタイトな Lagrange 部分多様体である．

定理 2.3 により，$L = Q_{1,n+1}(\mathbb{R}) \subset SO(n+2)/(SO(2) \times SO(n))$ については Arnold-Givental の不等式が成り立つ．$SB(L, \mathbb{Z}_2) = SB(S^n, \mathbb{Z}_2) = 2$ であるから，命題 2.6 により，次の補題を示せば十分である．

補題 4.2. $L = Q_{1,n+1}(\mathbb{R})$ の $G = SO(n+2)$ に関する平均交点数は 2 である．

証明. 定理 2.1 と (4.1) により，

$$\begin{aligned} &\int_{SO(n+2)} \#(L \cap gL) d\mu(g) \\ &= \int_{L \times L} \sigma_K(T_p^{\perp}L, T_q^{\perp}L) d\mu(p,q) \\ &= 2\mathrm{vol}(SO(n)) \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \mathrm{vol}(S^n)^2 \\ &= 2\frac{\mathrm{vol}(SO(n+2))}{\mathrm{vol}(S^{n+1})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \mathrm{vol}(S^n) \\ &= 2\mathrm{vol}(SO(n+2)) \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{2\pi^{(n+2)/2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \\ &= 2\mathrm{vol}(SO(n+2)). \end{aligned}$$

□

5 実形 $Q_{2,n}(\mathbb{R})$ の大域的タイト性

$Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $L = Q_{2,n}(\mathbb{R})$ は

$$\begin{aligned} L &= \left\{ [x_1, x_2, \sqrt{-1}y_1, \dots, \sqrt{-1}y_n] \in P_{n+1}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^1, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S^{n-1} \right\} \\ &\cong \left\{ \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^1, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S^{n-1} \right\} \subset \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2}) \end{aligned}$$

と表される. $L = Q_{2,n}(\mathbb{R})$ は $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の等質部分多様体であり,

$$\xi = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$$

を起点とする $K = SO(2) \times SO(n)$ 軌道 $K \cdot \xi$ として得られる. ここで, ξ における K のイソトロピー部分群 K_ξ は

$$\begin{aligned} K_\xi &= \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & A \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & B \end{array} \right), \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in O(n-1),\ \det A = 1 \\ B \in O(n-1),\ \det B = -1 \end{array} \right\} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times SO(n-1) \end{aligned}$$

となるので, L は

$$L \cong K/K_\xi = (SO(2) \times SO(n))/(\mathbb{Z}_2 \times SO(n-1)) \cong (S^1 \times S^{n-1})/\mathbb{Z}_2$$

と等質空間表示される. 任意の点 $p \in L$ に対して, $\{e_1, Je_2, \dots, Je_n\}$ が $(dg)_o^{-1}(T_pL)$ の正規直交基底であり, $\{Je_1, e_2, \dots, e_n\}$ が $(dg)_o^{-1}(T_p^\perp L)$ の正規直交基底であるような $g \in G$

が存在する. (2.1) により,

$$
\begin{aligned}
&\sigma_K(T_p^\perp L, T_q^\perp L)\\
&= \int_K \| Je_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge k^{-1}(Je_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)\| \, d\mu(k)\\
&= \int_K |\langle e_1 \wedge Je_2 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ k^{-1}(Je_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| \, d\mu(k)\\
&= \int_{SO(2)\times SO(n)} |\langle e_1 \wedge Je_2 \wedge \cdots \wedge Je_n,\ B^{-1}A(Je_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| \, d\mu(A)\, d\mu(B)\\
&= \int_{SO(2)\times SO(n)} |\langle B(e_1 \wedge Je_2 \wedge \cdots \wedge Je_n),\ A(Je_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| \, d\mu(A)\, d\mu(B)
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

となる. ここで, $k \in K$ を $k^{-1} = B^{-1}A$ $(A \in SO(2),\ B \in SO(n))$ と表した. さらに,

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{B\in SO(n)} B(e_1 \wedge Je_2 \wedge \cdots \wedge Je_n)\\
&= \{v_1 \wedge Jv_2 \wedge \cdots \wedge Jv_n \mid v_1, \ldots v_n \text{は } \mathbb{R}^n \text{の向き付けられた正規直交基底}\}\\
&= \{x \wedge J(*x) \mid x \in S^{n-1}(1)\}
\end{aligned}
$$

と変形する. ここで, $*$ は $\mathbb{R}^n$ における Hodge $*$ 作用素を表す. したがって, (5.1) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^\perp(L), T_q^\perp(L))\\
&= \int_0^{2\pi}\int_{S^{n-1}} |\langle x \wedge J(*x),\ (\cos\theta + J\sin\theta)(Je_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle| \, d\mu_{S^{n-1}}(x)\, d\theta
\end{aligned}
$$

となる. $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in S^{n-1}(1)$ とすると,

$$
*x = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i} \wedge \cdots \wedge e_n
$$

となり, $x \wedge J(*x)$ は次のように表される.

$$
\begin{aligned}
x \wedge J(*x) &= \left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j Je_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{Je_j} \wedge \ldots \wedge Je_n\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{j+1} x_i x_j e_i \wedge Je_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{Je_j} \wedge \ldots \wedge Je_n.
\end{aligned}
$$

したがって, 角度関数 (5.1) は次のように計算される.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^{\perp}(L), T_q^{\perp}(L)) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{S^{n-1}} \left| \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_i x_j e_i \wedge Je_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Je_j} \wedge \cdots \wedge Je_n, \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. (-\sin\theta e_1 + \cos\theta Je_1) \wedge (\cos\theta e_2 + \sin\theta Je_2) \wedge \cdots \wedge (\cos\theta e_n + \sin\theta Je_n) \right\rangle \right| d\mu_{S^{n-1}}(x)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{S^{n-1}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i^2 e_i \wedge Je_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Je_i} \wedge \cdots \wedge Je_n, \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -\sin^n\theta e_1 \wedge Je_2 \wedge \cdots \wedge Je_n + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} \cos^2\theta \sin^{n-2}\theta e_j \wedge Je_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Je_j} \wedge \cdots \wedge Je_n \right\rangle \right| \\
&\qquad d\mu_{S^{n-1}}(x)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{S^{n-1}} \left| -x_1^2 \sin^n\theta + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \cos^2\theta \sin^{n-2}\theta \right| d\mu_{S^{n-1}}(x)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} |\sin^{n-2}\theta| \int_{S^{n-1}} |-x_1^2\sin^2\theta + (1-x_1^2)\cos^2\theta|\, d\mu_{S^{n-1}}(x)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} |\sin^{n-2}\theta| \int_{S^{n-1}} |\cos^2\theta - x_1^2|\, d\mu_{S^{n-1}}(x)\, d\theta.
\end{aligned}
$$

ここで, 写像 f を

$$
\begin{array}{rcl}
f : (-1,1) \times S^{n-2} & \longrightarrow & S^{n-1} \\
\Big(x_1, (y_1, \ldots, y_{n-1})\Big) & \longmapsto & \Big(x_1, \sqrt{1-x_1^2}\, y_1, \ldots, \sqrt{1-x_1^2}\, y_{n-1}\Big)
\end{array}
$$

と定めると, f は $SO(n-1)$ 不変であり, その Jacobian は $Jf = (1-x_1^2)^{\frac{n-3}{2}}$ となる. したがって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^{\perp}(L), T_q^{\perp}(L)) \\
&= \int_0^{2\pi} |\sin^{n-2}\theta| \int_{-1}^{1}\int_{S^{n-2}} |\cos^2\theta - x_1^2|(1-x_1^2)^{\frac{n-3}{2}}\, d\mu_{S^{n-2}}(y)\, dx_1 d\theta \\
&= 2\mathrm{vol}(S^{n-2}) \int_0^{2\pi} |\sin^{n-2}\theta| \int_0^1 |\cos^2\theta - x^2|(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx d\theta \\
&= 8\mathrm{vol}(S^{n-2}) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \int_0^1 |\cos^2\theta - x^2|(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx d\theta \\
&= 8\mathrm{vol}(S^{n-2}) \Big\{ \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \int_0^{\cos\theta} (\cos^2\theta - x^2)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx d\theta \\
&\qquad + \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \int_{\cos\theta}^{1} (x^2 - \cos^2\theta)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx d\theta \Big\}.
\end{aligned}
$$

この定積分を実行する．一般二項定理より，

$$(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\frac{n-3}{2}(\frac{n-3}{2}-1)\cdots(\frac{n-3}{2}-l+1)}{l!}(-x^2)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}x^{2l}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^{\perp}(L),T_q^{\perp}(L)) \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \times \\
&\quad \left\{\int_0^{\cos\theta}(\cos^2\theta - x^2)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}x^{2l}\,dx + \int_{\cos\theta}^{1}(x^2-\cos^2\theta)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}x^{2l}\,dx\right\}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \times \\
&\quad \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\left\{\int_0^{\cos\theta}(\cos^2\theta\cdot x^{2l} - x^{2l+2})\,dx + \int_{\cos\theta}^{1}(x^{2l+2}-\cos^2\theta\cdot x^{2l})\,dx\right\}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \times \\
&\quad \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\left\{\left(\frac{1}{2l+1}-\frac{1}{2l+3}\right)\cos^{2l+3}\theta + \left(\frac{1}{2l+3}-\frac{1}{2l+1}\cos^2\theta\right)\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{1}{2l+3}-\frac{1}{2l+1}\right)\cos^{2l+3}\theta\right\}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\left\{\frac{4}{(2l+1)(2l+3)}\cos^{2l+3}\theta + \frac{1}{2l+3} - \frac{1}{2l+1}\cos^2\theta\right\}d\theta \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\left\{\frac{4}{(2l+1)(2l+3)}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}\theta\cos^{2l+3}\theta\,d\theta\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{2l+3}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}\theta\,d\theta - \frac{1}{2l+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\,d\theta\right\}.
\end{aligned}$$

最後の式の各々の積分はベータ関数 $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta$ を用いて表すことができ，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^{\perp}(L),T_q^{\perp}(L)) \\
&\quad = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\left\{\frac{4}{(2l+1)(2l+3)}\frac{1}{2}B\left(\frac{n-1}{2},l+2\right)\right. \\
&\quad\quad \left. +\frac{1}{2l+3}\frac{1}{2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2l+1}\frac{1}{2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\} \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

となる．次の補題が成立する．

補題 5.1.

$$\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\frac{1}{2l+3}\right\}\frac{1}{2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)-\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\frac{1}{2l+1}\right\}\frac{1}{2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right)=0.$$

証明. ベータ関数の定義式 $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ および $B(x,y)=B(y,x)$ より,

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right) &= B\left(\frac{3}{2},\frac{n-1}{2}\right)=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{n-3}{2}}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}t^l\,dt\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\frac{2}{2l+3}.
\end{aligned}$$

同様に,

$$B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\frac{2}{2l+1}.\quad\square$$

したがって, (5.2) は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^{\perp}(L),T_q^{\perp}(L))\\
&= 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\frac{1}{(2l+1)(2l+3)}B\left(\frac{n-1}{2},l+2\right)
\end{aligned}$$

となる. この右辺を

$$B\left(\frac{n-1}{2},l+2\right)=\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(l+2)}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+l+2)}=\frac{\frac{2}{n+1}\frac{2}{n-1}\Gamma(\frac{n+3}{2})(l+1)!}{\Gamma(\frac{n+3}{2}+l)}=\frac{4}{n^2-1}\frac{(2,l)}{(\frac{n+3}{2},l)}$$

および

$$\frac{1}{(2l+1)(2l+3)}=\frac{1}{3}\frac{(\frac{1}{2},l)}{(\frac{5}{2},l)}$$

を用いて書き直すと,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^{\perp}(L),T_q^{\perp}(L))\\
&= 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{n-3}{2},l)}{l!}\frac{1}{3}\frac{(\frac{1}{2},l)}{(\frac{5}{2},l)}\frac{4}{n^2-1}\frac{(2,l)}{(\frac{n+3}{2},l)}\\
&= \frac{8}{3(n^2-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2,l)(\frac{1}{2},l)(-\frac{n-3}{2},l)}{(\frac{5}{2},l)(\frac{n+3}{2},l)\,l!}
\end{aligned}$$

となる. この級数は, 一般化超幾何関数 (2.2) の $z=1$ での値

$$\frac{8}{3(n^2-1)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}2,\frac{1}{2},-\frac{n-3}{2}\\ \frac{5}{2},\frac{n+3}{2}\end{matrix};1\right)$$

と解釈できる. $\mathrm{Re}\left(2-2\frac{1}{2}-2(-\frac{n-3}{2})\right)=n-2$ であるから, 命題 2.2 を用いると,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(SO(n-1))}\sigma_K(T_p^\perp(L),T_q^\perp(L))\\
&\quad= \frac{8}{3(n^2-1)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}2,\frac{1}{2},-\frac{n-3}{2}\\ \frac{5}{2},\frac{n+3}{2}\end{matrix};1\right)\\
&\quad= \frac{8}{3(n^2-1)}\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(3)\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}\\
&\quad= \frac{8}{3(n^2-1)}\frac{\Gamma(2)}{2\Gamma(2)}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\frac{n+1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\\
&\quad= \frac{2}{n(n-1)} \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

が得られる.

定理 5.2. 複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $Q_{2,n}(\mathbb{R})$ は大域的にタイトな Lagrange 部分多様体である.

定理 2.3 により, $L=Q_{2,n}(\mathbb{R})\subset SO(n+2)/(SO(2)\times SO(n))$ については Arnold-Givental の不等式が成り立つ. $SB(L,\mathbb{Z}_2)=SB((S^1\times S^{n-1})/\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)=4$ であるから, 命題 2.6 により, 次の補題を示せば十分である.

補題 5.3. $L=Q_{2,n}(\mathbb{R})$ の $G=SO(n+2)$ に関する平均交点数は 4 である.

証明. (5.3) 式より,

$$\begin{aligned}
&\int_{SO(n+2)}\#(L\cap gL)d\mu(g)\\
&= \int_{L\times L}\sigma_K(T_p^\perp L,T_q^\perp L)d\mu(p,q)\\
&= \frac{16}{n(n-1)}\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(SO(n-1))\mathrm{vol}(L)^2\\
&= \frac{16}{n(n-1)}\mathrm{vol}(S^{n-2})\frac{\mathrm{vol}(SO(n+2))}{\mathrm{vol}(S^{n+1})\mathrm{vol}(S^n)\mathrm{vol}(S^{n-1})}\left(\frac{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^{n-1})}{2}\right)^2\\
&= \frac{4}{n(n-1)}\mathrm{vol}(SO(n+2))\left(\mathrm{vol}(S^1)\right)^2\frac{\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(S^{n-1})}{\mathrm{vol}(S^{n+1})\mathrm{vol}(S^n)}\\
&= \frac{4\mathrm{vol}(SO(n+2))}{n(n-1)}(2\pi)^2\frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)}\cdot\frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+2}{2}+1)}{(n+2)\pi^{\frac{n+2}{2}}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)}{(n+1)\pi^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= 16\mathrm{vol}(SO(n+2))\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\cdot\frac{\frac{n+2}{2}\Gamma(\frac{n+2}{2})}{n+2}\cdot\frac{\frac{n+1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{n+1}\\
&= 4\mathrm{vol}(SO(n+2)).\quad\Box
\end{aligned}$$

最近, 筑波大学の田崎博之氏により, 定理 1.8 を含む次の結果が独立に得られた.

定理 5.4 (田崎博之 [11]). 複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の実形 $L=Q_{k,n-k+2}(\mathbb{R})$ は大域的にタイトである.

田崎氏の証明は対称空間の最小軌跡と対蹠集合の構造を利用した方法であり, 実形の交点数だけでなく, 交点の配置まで明示的に書き表すことができる. 一方, 我々の方法は, 原理的には Hermite 対称空間を越えて等質 Kähler 多様体の場合まで適用可能であり, 実際, 旗多様体 $F_n(\mathbb{C})$ の場合には機能する.

6 旗多様体 $F_n(\mathbb{C})$ の実形 $F_n(\mathbb{R})$ の大域的タイト性

$\mathbb{C}^n$ 内の複素部分空間の列 $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ が $\dim_{\mathbb{C}} V_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ かつ $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ を満たすとき, $(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1})$ を $\mathbb{C}^n$ の旗と呼び, $\mathbb{C}^n$ 内の旗全体のなす集合を $F_n(\mathbb{C})$ と表す. $F_n(\mathbb{C})$ には $SU(n)$ が推移的に作用し, $SU(n)$ の極大トーラス

$$T^{n-1} := \left\{ \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\sqrt{-1}\theta_n} \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0 \right\} = S\bigl(U(1)^n\bigr)$$

がイソトロピー部分群になる. つまり,

$$\begin{aligned} F_n(\mathbb{C}) &= \left\{ (V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{C}} V_i = i \ (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n \end{array} \right\} \\ &\cong SU(n)/T^{n-1} \end{aligned}$$

となる. したがって, $F_n(\mathbb{C})$ には等質空間 $SU(n)/T^{n-1}$ から多様体構造が誘導され, これを旗多様体と呼ぶ. ここで, T^{n-1} の Lie 環を $\mathfrak{t}$ と表し,

$$\mathfrak{m} = \{(z_{ij}) \in \mathfrak{su}(n) \mid z_{kk} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$$

として, $SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(n)$ を

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$$

と直和分解する. $\mathfrak{m}$ は $\mathrm{Ad}(T^{n-1})$ 不変であるから, $SU(n)/T^{n-1}$ は簡約等質空間であり, $\mathfrak{m}$ は $SU(n)/T^{n-1}$ の原点 o における接空間 $T_o(SU(n)/T^{n-1})$ と同一視される. $\mathfrak{su}(n)$ に

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{trace}(XY^*) \qquad (X, Y \in \mathfrak{su}(n))$$

によって $\mathrm{Ad}(SU(n))$ 不変内積を定め, これを $\mathfrak{m}$ に制限すると, $\mathfrak{m}$ 上に $\mathrm{Ad}(T^{n-1})$ 不変内積が定まる. さらに, これにより $SU(n)/T^{n-1}$ 上に $SU(n)$ 不変 Riemann 計量が定まる. (i, j) 成分が 1 で (j, i) 成分が -1 でありその他の成分が 0 である行列を E_{ij} と表し, (i, j) 成分と (j, i) 成分が 1 でその他の成分が 0 である行列を JE_{ij} と表すと, $\{E_{ij}, JE_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ は $\mathfrak{m}$ の正規直交基底となる. このとき,

$$E_{ij} \mapsto JE_{ij}, \quad JE_{ij} \mapsto -E_{ij} \qquad (1 \leqq i < j \leqq n)$$

によって $\mathfrak{m}$ 上に複素構造が定まり, これにより $SU(n)/T^{n-1}$ はコンパクトな等質 Kähler 多様体となる.

一方, $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間の列 $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ が $\dim_{\mathbb{R}} W_i = i\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ かつ $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を満たすとき, $(W_1, W_2, \ldots, W_{n-1})$ を $\mathbb{R}^n$ の旗と呼び, $\mathbb{R}^n$ 内の旗全体のなす集合を $F_n(\mathbb{R})$ と表す. $F_n(\mathbb{R})$ には $SO(n)$ が推移的に作用し, $SU(n)$ の極大トーラス T^{n-1} と $SO(n)$ の共通部分がイソトロピー部分群になる.

$$T^{n-1} \cap SO(n) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon_i = \pm 1\ (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1 \end{array} \right\} \cong (\mathbb{Z}_2)^{n-1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} F_n(\mathbb{R}) &= \left\{ (W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} W_i = i\ (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \\ &\cong SO(n)/(\mathbb{Z}_2)^{n-1} \end{aligned}$$

となる. したがって, $F_n(\mathbb{R})$ には等質空間 $SO(n)/(\mathbb{Z}_2)^{n-1}$ から多様体構造が誘導され, これを実旗多様体と呼ぶ.

$SU(n)$ には行列の各成分の複素共役をとる作用として対合的な自己同型 $\tilde{\tau}$ が定まる. これは極大トーラス T^{n-1} を保存することから, $SU(n)/T^{n-1}$ の反正則な対合的等長変換 τ を誘導する. $SO(n) \subset SU(n)$ が $\tilde{\tau}$ の固定点集合であるから, τ による $SU(n)/T^{n-1}$ の固定点集合は $SO(n)/(T^{n-1} \cap SO(n))$ となる. つまり, $F_n(\mathbb{R})$ は $F_n(\mathbb{C})$ の実形である.

定理 6.1. 旗多様体 $F_n(\mathbb{C})$ の実形 $F_n(\mathbb{R})$ は大域的タイトな Lagrange 部分多様体である.

これを示すためには Arnold-Givental の不等式 (定理 2.3) は深谷-Oh-太田-小野 [2] による一般化された結果を用いなければならない. 定理の証明の詳細は別の機会に報告する.

7 付録

上の節では, コンパクトな等質 Kähler 多様体の実形の大域的タイト性を示す方法として積分幾何と Lagrange 交差理論を用いる手法を使った.

ここでは, $L = Q_{1,n+1}(\mathbb{R}) \subset Q_n(\mathbb{C})$ の場合のみに通用する定理 4.1 の初等的な別証明を与える. 以下の証明は東北大学の宮岡礼子先生から教えていただいたアイデアを基にしている.

4 節の記号に従う. $L = Q_{1,n+1}(\mathbb{R}) \subset Q_n(\mathbb{C})$ は $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$ の原点 o を通る H 軌道 $H \cdot o$ として得られる. ここで, $\widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2})$ を

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G_2}(\mathbb{R}^{n+2}) & \longrightarrow & S \subset \wedge^2 \mathbb{R}^{n+2} \\ \mathrm{span}\{x, y\} & \longmapsto & x \wedge y \end{array}$$

によって $\wedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$ 内の超球面 S に埋め込むと, L は $\wedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$ 内において $e_1 \wedge e_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$ を通る H 軌道として得られる. つまり, $\wedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$ 内の部分空間 V_0 を

$$V_0 := \mathrm{span}\{e_1 \wedge e_i \mid 2 \le i \le n+2\}$$

によって定めると

$$L = S \cap V_0$$

となる. したがって, $g \in G$ について

$$L \cap gL = (S \cap V_0) \cap (S \cap gV_0) = S \cap (V_0 \cap gV_0)$$

となる. 田崎氏の補題 ([11, Lemma 3.1]) により, 任意の $g \in G$ について $L \cap gL \neq \emptyset$ であるから, $V_0 \cap gV_0 \neq \{0\}$ である. つまり, $\dim(V_0 \cap gV_0) \geq 1$ となる. ここで, $\dim(V_0 \cap gV_0) = 1$ ならば $\#(L \cap gL) = 2$ となる. 一方, $\dim(V_0 \cap gV_0) = k \geq 2$ ならば $L \cap gL = S \cap (V_0 \cap gV_0) = S^{k-1}$ となり, L と gL の交わりは横断的ではない. よって, L と gL が横断的に交わるような任意の $g \in G$ について $\#(L \cap gL) = 2$ となり, L が大域的にタイトであることが示された.

参考文献

[1] J. J. Duistermaat, *Convexity and tightness for restrictions of Hamiltonian functions to fixed point sets of an antisymplectic involution*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 417–429.

[2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian ingersection Floer theory.*

[3] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106**, (1993).

[4] H. Iriyeh and T. Sakai, *Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$*, to appear in Geom. Dedicata

[5] Y.-G. Oh, *Tight Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}P^n$*, Math. Z. **207** (1991), 409–416.

[6] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993.

[7] Y.-G. Oh, *Addendum to "Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I"*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 1299–1302.

[8] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

[9] M. Takeuchi and S. Kobayashi, *Minimal embeddings of R-symmetric spaces*, J. Differ. Geom. **2** (1968), 203–215.

[10] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric functions*, Cambridge at the University Press, (1966).

[11] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, preprint.

Hiroshi Iriyeh
School of Science and Technology for Future Life
Tokyo Denki University
2-2 Kanda-Nishiki-Cho, Chiyoda-Ku
Tokyo, 101-8457, Japan
E-mail address : hirie@im.dendai.ac.jp

Takashi Sakai
Department of Mathematics and Information Sciences
Tokyo Metropolitan University
Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji-shi
Tokyo 192-0397, Japan
E-mail address : sakai-t@tmu.ac.jp